LOIS DE PROBABILITÉS CONTINUES

Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux variables aléatoires X qui prennent leurs valeurs dans un **intervalle**.

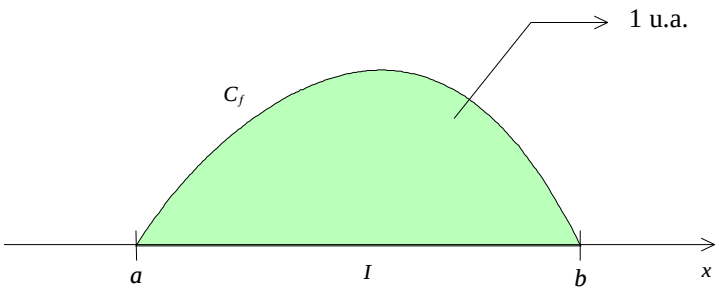
1. Densité et loi de probabilité

1.1. Définition *Densité de probabilité*

Soit I un intervalle.

On appelle densité de probabilité sur I toute fonction f **continue et positive sur I** telle que :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$



Remarques :

- Si $I = [a, b]$, alors la quantité notée $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne simplement $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si I est un intervalle non borné, par exemple $[a, +\infty[$, alors la quantité notée $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne, lorsqu'elle existe, la limite suivante :

  $$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

  Définition analogue si I est du type $]-\infty, b[$.
- Enfin, si $I = \mathbb{R}$, alors la quantité notée $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne, lorsqu'elles existent, la somme des deux limites suivantes :

  $$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemples :

1. Déterminer un réel α de façon que la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x + \alpha$ soit une densité de probabilité sur $[0, 1]$.

   On cherche α tel que : $\int_0^1 (x+\alpha)\,\mathrm{d}x = 1$

$$\left[\frac{x^2}{2}+\alpha x\right]_0^1 = 1$$

$$\frac{1}{2}+\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

2. Soit f une fonction constante sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$). Quelle doit être la valeur de la constante f pour qu'elle soit une densité ?

   Notons γ cette constante.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\int_a^b \gamma\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\gamma(b-a) = 1$$

$$\gamma = \frac{1}{b-a}$$

3. Soit λ un réel strictement positif. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \lambda \mathbf{e}^{-\lambda t}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+$.

   Calculons : $$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda \mathbf{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda\left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x = 1 - \mathbf{e}^{-\lambda x}$$

   Or, on a : $$\lim_{x\to+\infty}(1 - \mathbf{e}^{-\lambda x}) = 1$$

   La limite en $+\infty$ de $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe bien et on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

1.2. Définition *Loi de probabilité*

Soit I un intervalle et f une densité de probabilité sur I.

L'application P qui, à tout sous-intervalle $[a, b]$ de I associe la quantité

$$P([a, b]) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelée loi de probabilité sur I.

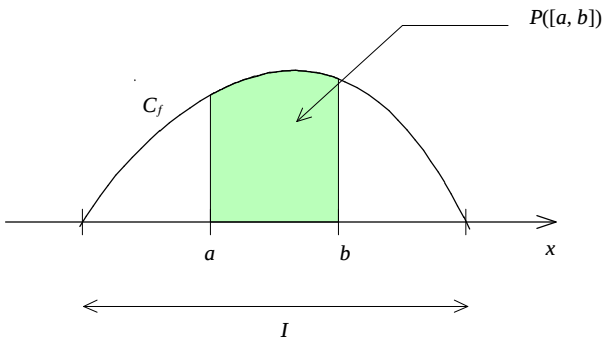
En effet, cette définition est légitime car on a : $P(I) = 1$

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-intervalles disjoints de I, alors par linéarité de l'intégrale :

$$P\left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{I_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(I_n)$$

On retrouve bien les propriétés des probabilités.

Illustration :



Remarques :

- Puisque $[a, b]$ est inclus dans I et que f est positive sur I, on bien $P([a, b]) \in [0, 1]$.
- La probabilité d'un singleton (ou intervalle réduit à un point) est nulle. En effet :

$$P(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

  On dit alors que $\{x_0\}$ est un événement "quasi-impossible".
- La définition s'étend à des intervalles non bornés lorsque la limite de l'intégrale existe.

Cas particuliers :

- Si f est constante sur $[a, b]$ (égale à $\dfrac{1}{b-a}$ d'après un calcul précédent), on dit que P est la loi uniforme.
- Si f est de la forme $f(t) = \lambda \mathbf{e}^{-\lambda t}$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lambda > 0$, on dit que P est la loi exponentielle de paramètre λ.

2. Variables aléatoires continues. Loi uniforme, loi exponentielle

Sont dites continues les variables aléatoires qui prennent leurs valeurs dans un intervalle I.

2.1. Définition *Loi de probabilité d'une variable aléatoire*

Soit P une loi de probabilité sur un intervalle I de densité f.

On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans I, suit une loi de probabilité P lorsque pour tout sous-intervalle $[a, b]$ de I, on a :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemples :

- **Cas de la loi uniforme** sur un intervalle $[a, b]$:

$$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

  Ainsi, si X suit une loi uniforme sur un intervalle I, alors la probabilité d'un sous-intervalle J est donnée par la formule :

$$\frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}$$

- **Cas d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$** sur $\mathbb{R}_+$

$$P(0 \leqslant X \leqslant x) = \int_0^x \lambda \mathbf{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathbf{e}^{-\lambda x}$$

Et par complémentarité : $P(X \geqslant x) = 1 - P(0 \leqslant X < x) = \mathbf{e}^{-\lambda x}$

Exercices :

1. Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station n°14.

   Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.

   On suppose que X suit la loi uniforme sur [0 ; 6].

   Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

$$P(3 \leqslant X \leqslant 5) = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$$

2. On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

   a. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie :

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leqslant 10) = 1 - \int_0^{10} 0{,}1\mathbf{e}^{-0{,}1t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathbf{e}}$$

   b. On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans.

   Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?

$$P(X > 12 \mid X > 10) = P_{(X>10)}(X > 12) = \frac{P(X>12)}{P(X>10)} = \frac{\mathbf{e}^{-0{,}1\times 12}}{\mathbf{e}^{-1}} = \mathbf{e}^{-0{,}2} \simeq 0{,}82$$

   c. Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans :

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - \int_0^{2} 0{,}1\mathbf{e}^{-0{,}1t}\,\mathrm{d}t = \mathbf{e}^{-0{,}2} \simeq 0{,}82$$

   On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de plus ne dépend pas de son âge.

   On dit que X est une loi de durée de vie *sans vieillissement*.

   Une étude plus systématique de ce phénomène sera faite au paragraphe suivant.

2.2. Définition *Fonction de répartition*

Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans un intervalle I de la forme $[a, b]$ (ou de la forme $[a, +\infty[$), qui suit une loi de probabilité P.

On appelle fonction de répartition de X, la fonction F définie pour tout réel x de I par :

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

On a donc pour tout x de I : $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Ce qui justifie la notation puisqu'il apparaît alors que F est la primitive de la densité f qui s'annule en a :

$$F' = f$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

- F est croissante sur $[a, x]$ (puisque sa dérivée f, qui est une densité, est positive sur I)
- $F(a) = 0$
- $F(b) = 1$ (si $I = [a, b]$) ou $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ (si $I = [a, +\infty[$)
- $P(X > x) = 1 - F(x)$
- $P(\alpha < X \leqslant \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

Exemple : dans le cas d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, on a :

$$F(x) = 1 - \mathbf{e}^{-\lambda x}$$

3. Loi de durée de vie sans vieillissement

3.1. Définition

Soit T la variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un individu ou d'un objet.

On dit que T suit la loi de durée de vie sans vieillissement lorsque la probabilité que l'individu (ou l'objet) soit vivant (ou fonctionne) à l'instant $t + h$ sachant qu'il est vivant (ou qu'il fonctionne) à l'instant t ne dépend pas de son âge t :

$$P_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t + h) = P(T \geqslant h)$$

Remarque : la loi de durée de vie sans vieillissement s'applique-t-elle aux humains ? Non, ce n'est pas un modèle pertinent à long terme. En effet, un bébé à la naissance peut raisonnablement espérer vivre plusieurs dizaines d'années alors qu'on ne peut en dire autant d'un vieillard. Le modèle semble plus proche de la réalité lorsque h est petit. Par exemple la probabilité de vivre encore une minute semble comparable indépendamment de l'âge. Mais cette loi s'applique plutôt à des composants électroniques par exemple.

3.2. Propriété

Une variable aléatoire T suit la loi de durée de vie sans vieillissement si seulement si elle suit une loi exponentielle.

Démonstration :

Supposons que T suive une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a :

$$P_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t + h) = \frac{P((T \geqslant t+h) \cap (T \geqslant t))}{P(T \geqslant t)}$$

Or, l'événement $(T \geqslant t + h)$ est inclus dans l'événement $(T \geqslant t)$ donc :

$$P((T \geqslant t + h) \cap (T \geqslant t)) = P(T \geqslant t + h) = \mathbf{e}^{-\lambda(t+h)}$$

Par ailleurs : $$P(T \geqslant t) = \mathbf{e}^{-\lambda t}$$

D'où : $$P_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{\mathbf{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathbf{e}^{-\lambda t}} = \mathbf{e}^{-\lambda h} = P(T \geqslant h)$$

Réciproquement, soit T une variable aléatoire suivant une loi de durée de vie sans vieillissement.

Alors pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$ et tout réel h de $\mathbb{R}_+$:

$$P_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$$

$$P(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)\, P(T \geqslant t)$$

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire T. Notons φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(t) = 1 - F(t) = 1 - P(T \leqslant t) = P(T > t) = P(T \geqslant t)$$

Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, φ l'est aussi et on a :

$$\varphi(0) = 1 - F(0) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(t+h) = \varphi(h)\, \varphi(t)$$

Autrement dit, φ vaut 1 en 0 et transforme les sommes en produits.

On en déduit (voir théorème 3.1 dans la leçon sur les équations différentielles du type $y' = ky$ et la fonction exponentielle) qu'il existe un réel a tel que pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) = \mathbf{e}^{at}$$

Mais comme φ est en fait une probabilité, on a pour tout t de $\mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) \leqslant 1$$

$$\mathbf{e}^{at} \leqslant 1$$

$$at \leqslant 0$$

$$a \leqslant 0$$

Posons $\lambda = -a \in \mathbb{R}_+$. Si a était nul on aurait, pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) = 1$$

$$P(T \geqslant t) = 1$$

Ce qui signifierait que notre individu est éternel, hypothèse que l'on peut légitimement rejeter.

Donc on a bien : $$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

D'où, pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$: $$\varphi(t) = \mathbf{e}^{-\lambda t}$$

$$1 - F(t) = \mathbf{e}^{-\lambda t}$$

Et en dérivant : $$-f(t) = -\lambda\, \mathbf{e}^{-\lambda t}$$

$$f(t) = \lambda\, \mathbf{e}^{-\lambda t}$$

La variable aléatoire T suit donc une loi exponentielle de paramètre λ.

4. Loi de désintégration radioactive

Nous avons déjà vu (voir les exercices sur les équations différentielles) que dans un corps radioactif, le nombre moyen de noyaux d'atomes qui se désintègrent pendant un intervalle de temps Δt est proportionnel au produit de Δt et du nombre $N(t)$ de noyaux présents à l'instant t. Il existe donc une constante λ strictement positive[(1)] , indépendante du temps t telle que :

$$\Delta N(t) = -\lambda\, N(t)\, \Delta t$$

Lorsqu'on a affaire à un très grand nombre de noyaux atomiques (ce qui est le cas en pratique) on assimile la fonction $t \longmapsto N(t)$ à une fonction continue et dérivable. En faisant tendre l'intervalle d'observation Δt vers 0, la relation ci-dessus s'écrit :

$$\mathrm{d}N(t) = -\lambda\, N(t)\, \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda\, N(t)$$

Ce que, nous autres mathématiciens notons encore :

$$N'(t) = -\lambda\, N(t)$$

On en déduit la loi de désintégration radioactive :

$$N(t) = N_0\, \mathbf{e}^{-\lambda t}$$

Nous proposons maintenant de retrouver cette loi par une autre approche.

En effet, selon les physiciens la durée de vie T d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement, autrement dit, une loi exponentielle. Considérons l'expérience $\mathscr{E}$: "on examine un noyau à l'instant t". Notons S l'événement "ce noyau n'est pas désintégré". D'après la loi exponentielle, il existe un réel λ strictement positif tel que :

$$P(S) = P(T \geqslant t) = \mathbf{e}^{-\lambda t}$$

Supposons que l'on ait au départ ($t = 0$), dans notre corps radioactif, N_0 noyaux. Notons X_t la variable aléatoire égale au nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t. Comme chaque noyau se désintègre indépendamment des autres, on peut affirmer que X_t suit une loi binomiale de paramètres $n = N_0$ et $p = P(S) = \mathbf{e}^{-\lambda t}$.

Le nombre moyen $N(t)$ de noyaux présents à l'instant t est donc donné par l'espérance de X_t :

$$N(t) = \mathbb{E}(X_t) = np = N_0\, \mathbf{e}^{-\lambda t}$$

5. Espérance d'une variable aléatoire continue

5.1. Définition *Espérance d'une variable aléatoire continue*

Soit X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans un intervalle I.

On appelle espérance de X la quantité :

$$\mathbb{E}(X) = \int_I t\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

(Sous réserve d'existence lorsque I n'est pas borné)

(1) La constante λ est appelée "constante radioactive du noyau"

Exemples :

1. Cas d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $I = [a, b]$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b+a}{2}$$

   Rien de bien surprenant dans ce résultat, on obtient la moyenne arithmétique de a et b.

2. Cas d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

   Calculons tout d'abord l'intégrale suivante :

$$\int_0^x t\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^x t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

   On pose : $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$

   Ainsi : $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}$

   Une intégration par parties donne :

$$\lambda \int_0^x t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = -x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\left[\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = \frac{-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1}{\lambda}$$

   Puis, on étudie la limite lorsque x tend vers $+\infty$. On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} -x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0 \quad (\text{car } \lim_{X\to+\infty} X\mathrm{e}^{-X} = 0 \text{ et } \lambda > 0)$$

   Et : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$

   D'où : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

6. Liens entre le discret et le continu

DISCRET	CONTINU
Univers $X(\Omega)$	Intervalle I
Evénement E : partie de $X(\Omega)$	Evénement J : sous-intervalle de I (ou partie engendrée par des intervalle)[1]
Probabilités p_i des événements élémentaires $\sum_i p_i = 1$	Densité de probabilité f $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
Espérance d'une variable aléatoire discrète X $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i$	Espérance d'une variable aléatoire continue X $\mathbb{E}(X) = \int_I t f(t)\,\mathrm{d}t$

[1] On ne peut pas considérer que chaque partie de I est un événement car on aurait une structure bien trop lourde qui nous empêcherait de calculer les probabilités. En pratique, on considère que les événements sont les parties de I engendrées par les intervalles (tribu des Boréliens)